УДК 519.832.3

В.В. Романюк

МЕТОД РЕАЛІЗАЦІЇ ОПТИМАЛЬНИХ ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЙ У МАТРИЧНІЙ ГРІ З ПОРОЖНЬОЮ МНОЖИНОЮ СІДЛОВИХ ТОЧОК У ЧИСТИХ СТРАТЕГІЯХ З ВІДОМОЮ КІЛЬКІСТЮ ПАРТІЙ ГРИ

Вступ

Теорія антагоністичних ігор, яка є основою ігрового математичного моделювання, дає можливість відносно просто досліджувати і прогнозувати техніко-економічні і соціальні конфліктно-керовані процеси [1]. Прийняття оптимальних рішень в умовах конфліктних ситуацій пов'язано насамперед з розв'язуванням матричних ігор. Відомі методи розв'язування матричної гри з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях дають змогу знаходити її розв'язки у змішаних стратегіях, де довільна пара оптимальних змішаних стратегій гравців становить ситуацію рівноваги і, таким чином, задовольняє відомий принцип оптимальності [1, 2]. Практична реалізація принципу оптимальності, тобто практична реалізація кожним гравцем його оптимальних змішаних стратегій у реальних процесах, досліджена і висвітлена у працях [2–6]. Зокрема, у [4] показано, як реалізувати оптимальні змішані стратегії в довільній матричній 2×2-грі із скінченною кількістю партій гри, де за основу взято розігрування гравцями в кожній партії двох незалежних рівномірно розподілених на напівсегменті $[0; 1)$ випадкових величин та визначення за певними співвідношеннями тих чистих стратегій гравців, які в даній партії гри необхідно вибирати.

Постановка задачі

Розроблений у статті [4] метод реалізації оптимальних змішаних стратегій можна легко узагальнити для довільної матричної $M \times N$-гри, де $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Проте тут передбачається, що кількість партій гри наперед невідома, тому завданням даної статті є побудова методу реалізації оптимальних змішаних стратегій у довільній матричній грі з відомою кількістю партій гри $G < \infty$.

Реалізація оптимальних змішаних стратегій при відомій кількості партій гри

Розглядатимемо довільну матричну $M \times N$-гру з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях, де перший гравець володіє множиною $X = \{x_i\}_{i=1}^{M}$ чистих стратегій, а другий — множиною $Y = \{y_j\}_{j=1}^{N}$ чистих стратегій. Нехай оптимальною змішаною стратегією першого гравця буде вектор

$$\widehat{\mathbf{X}} = [\,\widehat{p}_1 \quad \widehat{p}_2 \quad \ldots \quad \widehat{p}_{M-1} \quad \widehat{p}_M\,], \tag{1}$$

а оптимальною змішаною стратегією другого гравця є вектор

$$\breve{\mathbf{Y}} = [\,\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \ldots \quad \breve{q}_{N-1} \quad \breve{q}_N\,]. \tag{2}$$

Ці вектори, звісно, задовольняють очевидні вимоги:

$$\widehat{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^M, \ \widehat{p}_i \in [0;\, 1] \quad \forall\, i = \overline{1,\, M}, \ \sum_{i=1}^{M} \widehat{p}_i = 1, \tag{3}$$

$$\breve{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^N, \ \breve{q}_j \in [0;\, 1] \quad \forall\, j = \overline{1,\, N}, \ \sum_{j=1}^{N} \breve{q}_j = 1. \tag{4}$$

За спектром

$$\operatorname{supp} \widehat{\mathbf{X}} = \{x_i \in X : \widehat{p}_i > 0\} = \{x_{i_k}\}_{k=1}^{K} \tag{5}$$

оптимальної стратегії (1) першого гравця сформуємо вектор відповідних імовірностей

$$\widehat{\mathbf{X}}_0 = [\,\widehat{p}_{i_1} \quad \widehat{p}_{i_2} \quad \ldots \quad \widehat{p}_{i_{K-1}} \quad \widehat{p}_{i_K}\,], \tag{6}$$

де $K \le M$; $i_k < i_{k+1}$ $\forall\, k = \overline{1,\, K-1}$; $i_k \in \{i\}_{i=1}^{M}$ $\forall\, k = \overline{1,\, K}$. Аналогічно за спектром

$$\operatorname{supp} \breve{\mathbf{Y}} = \{y_j \in Y : \breve{q}_j > 0\} = \{y_{j_l}\}_{l=1}^{L} \tag{7}$$

оптимальної стратегії (2) другого гравця сформуємо вектор відповідних імовірностей

$$\breve{\mathbf{Y}}_0 = [\,\breve{q}_{j_1} \quad \breve{q}_{j_2} \quad \ldots \quad \breve{q}_{j_{L-1}} \quad \breve{q}_{j_L}\,], \tag{8}$$

де $L \le N$; $j_l < j_{l+1}$ $\forall\, l = \overline{1,\, L-1}$; $j_l \in \{j\}_{j=1}^{N}$ $\forall\, l = \overline{1,\, L}$.

Якщо кількість партій гри невідома, то на основі узагальнення результатів статті [4] метод реалізації оптимальних змішаних стратегій полягатиме в тому, що в матричній $M \times N$-грі з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях, де гравці мають спектри (5) і (7) своїх оптимальних змішаних стратегій, перший гравець буде розігрувати $K-1$ рівномірно розподілену на напівсегменті [0; 1) випадкову величину $\{\Theta_k\}_{k=1}^{K-1}$ із значеннями $\{\theta_k\}_{k=1}^{K-1}$, а другий – розігруватиме $L-1$ рівномірно розподілену на напівсегменті [0; 1) випадкову величину $\{\Xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ із значеннями $\{\xi_l\}_{l=1}^{L-1}$. Очевидно, що в кожній парі $\{\{\Theta_k, \Xi_l\}_{k=1}^{K-1}\}_{l=1}^{L-1}$ ці випадкові величини мають бути незалежними. Перший гравець розігрує випадкову величину Θ_k завжди перед випадковою величиною Θ_{k+1} $\forall\, k=\overline{1,\, K-2}$, причому якщо значення

$$\theta_u < \widehat{p}_{i_u} \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{u-1} \widehat{p}_{i_k}} \qquad (9)$$

випадкової величини Θ_u, то перший гравець вибирає чисту стратегію x_{i_u} $\forall\, u=\overline{1,\, K-1}$; інакше, якщо

$$\theta_u \geq \widehat{p}_{i_u} \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{u-1} \widehat{p}_{i_k}}, \qquad (10)$$

то перший гравець має розігрувати випадкову величину Θ_{u+1} $\forall\, u=\overline{1,\, K-2}$ та вибирати чисту стратегію x_{i_K} при $u=K-1$. Другий гравець розігрує випадкову величину Ξ_l завжди перед випадковою величиною Ξ_{l+1} $\forall\, l=\overline{1,\, L-2}$, причому якщо значення

$$\xi_v < \breve{q}_{j_v} \frac{1}{1-\sum_{l=1}^{v-1} \breve{q}_{j_l}} \qquad (11)$$

випадкової величини Ξ_v, то другий гравець вибирає чисту стратегію y_{j_v} $\forall\, v=\overline{1,\, L-1}$; інакше, якщо

$$\xi_v \geq \breve{q}_{j_v} \frac{1}{1-\sum_{l=1}^{v-1} \breve{q}_{j_l}}, \qquad (12)$$

то другий гравець має розігрувати випадкову величину Ξ_{v+1} $\forall\, v=\overline{1,\, L-2}$ і вибирати чисту стратегію y_{j_L} при $v=L-1$. При цьому кожен із гравців вибирає чисті стратегії із спектрів (5) і (7) з відповідними імовірностями (6) і (8), реалізуючи в такий спосіб оптимальні змішані стратегії (1) і (2).

Отже, розігрування відповідних випадкових величин $\{\Theta_k\}_{k=1}^{K-1}$ і $\{\Xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ забезпечує реалізацію лише векторів імовірностей (1) і (2). Проте ймовірність у даному розумінні математично і практично реалізується при нескінченній кількості випробувань, тобто при нескінченній кількості партій гри. Коли ця кількість невідома, то можна керуватися викладеним вище методом. Але при відомій кількості партій гри G гравець намагатиметься розробити власну тактику перебору чистих стратегій [6] для забезпечення свого якомога більшого середнього виграшу.

Позначимо $\mathbf{W}=(w_{ij})_{M\times N}$ матрицю $M\times N$-гри з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях. Припускатимемо, що обидва гравці будуть дотримуватися принципу оптимальності, тобто вибирати свої чисті стратегії з імовірностями у векторах (6) і (8), використовуючи описаний вище метод реалізації оптимальних змішаних стратегій з виразами (9)–(12). Нехай перший гравець у першій партії гри вибирає чисту стратегію x_{i_r}, $r\in\{k\}_{k=1}^{K}$. Тоді його очікуваний виграш у першій партії гри

$$\tilde{V}(x_{i_r},\, 1)=\sum_{l=1}^{L} w_{i_r j_l}\breve{q}_{j_l} \qquad (13)$$

має бути не меншим за деяке наперед вказане число. Очевидно, що це число не завжди може точно дорівнювати значенню гри

$$V_{\text{opt}}=\widehat{\mathbf{X}}\mathbf{W}(\breve{\mathbf{Y}})^T=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} w_{ij}\widehat{p}_i\breve{q}_j\,. \qquad (14)$$

Крім того, очікуваний виграш (13) формально може виявитись і меншим за значення гри (14). Тому в першій партії гри першому гравцю при виборі чистої стратегії x_{i_r} необхідно керуватися формальною вимогою

$$\tilde{V}(x_{i_r},1)=\sum_{l=1}^{L} w_{i_r j_l}\breve{q}_{j_l} \geq V_{\text{opt}}-\delta_1(1)\,, \qquad (15)$$

де число $\delta_1(1)>0$ є своєрідним допуском втрати першого гравця в першій партії гри. Отже, якщо при виборі деякої чистої стратегії x_{i_t} має місце нерівність

$$\tilde{V}(x_{i_t}, 1) = \sum_{l=1}^{L} w_{i_t j_l} \breve{q}_{j_l} < V_{\text{opt}} - \delta_1(1), \tag{16}$$

де $t \in \{k\}_{k=1}^{K}$, то перший гравець розігрує випадкові величини $\{\Theta_k\}_{k=1}^{K-1}$ із значеннями $\{\theta_k\}_{k=1}^{K-1}$ до того моменту, доки для деякої чистої стратегії x_{i_r} не буде виконана нерівність (15). Поки що не визначатимемо саме число $\delta_1(1)$, але з очевидної вимоги

$$V_{\text{opt}} - \delta_1(1) \geq V_{\text{low}} = \max_{i=\overline{1,\ M}} \min_{j=\overline{1,\ N}} w_{ij} \tag{17}$$

перший гравець буде керуватися верхнім значенням можливої втрати

$$\delta_1(1) \leq V_{\text{opt}} - V_{\text{low}} = V_{\text{opt}} - \max_{i=\overline{1,\ M}} \min_{j=\overline{1,\ N}} w_{ij} \tag{18}$$

у першій партії гри.

Реальний виграш першого гравця у g-й партії гри позначатимемо $V(g)$, де $g = \overline{1, G}$. Тоді, отримавши виграш $V(1)$, перший гравець може по елементах із значенням $V(1)$ матриці $\mathbf{W}$ визначити, якою саме із спектра (7) чистою стратегією користувався другий гравець. Нехай це була стратегія y_{j_s}, де $s \in \{l\}_{l=1}^{L}$. Зрозуміло, що у другій партії гри імовірність вибору цієї стратегії буде меншою, і перший гравець мусить це враховувати. Якщо на початку гри кожну імовірність у векторі (8) подати у вигляді дробу із знаменником, що дорівнює кількості G майбутніх партій гри, то, віднімаючи одиницю від чисельника імовірності $\breve{q}_{j_s}$, яка відповідає щойно використаній другим гравцем чистій стратегії y_{j_s}, перший гравець отримає нову імовірність вибору другим гравцем стратегії y_{j_s}. Отже, якщо

$$\breve{\mathbf{Y}}_0 = [\breve{q}_{j_1} \quad \breve{q}_{j_2} \quad \ldots \quad \breve{q}_{j_{L-1}} \quad \breve{q}_{j_L}] =$$

$$= [q_{j_1}(1) \quad q_{j_2}(1) \quad \ldots \quad q_{j_{L-1}}(1) \quad q_{j_L}(1)] =$$

$$= \left[\frac{c_1(1)}{G} \quad \frac{c_2(1)}{G} \quad \ldots \quad \frac{c_{L-1}(1)}{G} \quad \frac{c_L(1)}{G} \right], \tag{19}$$

де $c_l(1) = G\breve{q}_{j_l}$ $\forall\ l = \overline{1, L}$, то на початку другої партії гри матимемо $q_{j_s}(2) = \dfrac{c_s(1) - 1}{G}$. Щоправда, при $c_s(1) < 1$ необхідно покладати $q_{j_s}(2) = 0$. При цьому на початку другої партії гри має зберігатися одинична сума всіх імовірностей $\{q_{j_l}(2)\}_{l=1}^{L}$. Тому, визначивши імовірність

$$q_{j_s}(2) = \frac{c_s(1) - 1}{G} \, \frac{1 + \operatorname{sign}[c_s(1) - 1]}{2} = \frac{c_s(2)}{G}, \tag{20}$$

де вже враховано, що при $c_s(1) < 1$ буде $q_{j_s}(2) = 0$, запишемо рівняння

$$q_{j_s}(1) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq s}}^{L} q_{j_l}(1) = 1 \tag{21}$$

для першої партії гри і рівняння

$$q_{j_s}(2) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq s}}^{L} q_{j_l}(2) = 1 \tag{22}$$

для другої партії гри. Нехай $q_{j_l}(2) = \alpha q_{j_l}(1)$ $\forall\ l = \overline{1, L}$ і $l \neq s$, де α — деякий коефіцієнт. Тоді з рівнянь (21) і (22) при врахуванні того, що

$$q_{j_s}(2) = q_{j_s}(1) \frac{c_s(1) - 1}{c_s(1)} \, \frac{1 + \operatorname{sign}[c_s(1) - 1]}{2}, \tag{23}$$

отримаємо

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq s}}^{L} q_{j_l}(2) = 1 - q_{j_s}(2) = \alpha \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq s}}^{L} q_{j_l}(1) = \alpha [1 - q_{j_s}(1)]. \tag{24}$$

Звідси шуканий коефіцієнт перерахунку імовірностей для другої партії гри становить

$$\alpha = \frac{1 - q_{j_s}(2)}{1 - q_{j_s}(1)} =$$

$$= \frac{1 - q_{j_s}(1) \dfrac{c_s(1) - 1}{c_s(1)} \, \dfrac{1 + \operatorname{sign}[c_s(1) - 1]}{2}}{1 - q_{j_s}(1)}. \tag{25}$$

Тепер, обчисливши імовірність (23) та імовірності

$$q_{j_l}(2)=q_{j_l}(1)\frac{1-q_{j_s}(1)\dfrac{c_s(1)-1}{c_s(1)}\dfrac{1+\mathrm{sign}\,[c_s(1)-1]}{2}}{1-q_{j_s}(1)}=$$

$$=\frac{c_l(2)}{G}\quad\forall\, l\in\{\overline{1,L}\}\setminus\{s\},\qquad(26)$$

перший гравець перед вибором у другій партії гри своєї чистої стратегії x_{i_r}, $r\in\{k\}_{k=1}^{K}$, перевіряє, чи його середній виграш буде не меншим за число $V_{\text{opt}}-\delta_1(2)$, тобто перевіряє виконання нерівності

$$\frac{V(1)+\tilde V(x_{i_r},\,2)}{2}=$$

$$=\frac{V(1)+\sum_{l=1}^{L}w_{i_r j_l}q_{j_l}(2)}{2}\ge V_{\text{opt}}-\delta_1(2),\qquad(27)$$

де число $\delta_1(2)>0$ є допуском втрати першого гравця у другій партії гри. При цьому цілком очевидно, що має бути справедливою строга нерівність $\delta_1(2)<\delta_1(1)$. Якщо (27) не виконується для стратегії x_{i_r}, то перший гравець розігрує випадкові величини $\{\Theta_k\}_{k=1}^{K-1}$ із значеннями $\{\theta_k\}_{k=1}^{K-1}$ до того моменту, доки для деякої чистої стратегії не буде виконана ця нерівність.

Взагалі, у g-й партії гри, де $g=\overline{2,G}$, перший гравець після вибору другим гравцем у попередній $(g-1)$-й партії чистої стратегії y_{j_s}, $s\in\{l\}_{l=1}^{L}$, обчислює імовірність

$$q_{j_s}(g)=\frac{c_s(g-1)-1}{G}\frac{1+\mathrm{sign}\,[c_s(g-1)-1]}{2}=\frac{c_s(g)}{G}=$$

$$=q_{j_s}(g-1)\frac{c_s(g-1)-1}{c_s(g-1)}\frac{1+\mathrm{sign}\,[c_s(g-1)-1]}{2},\quad(28)$$

а також імовірності

$$q_{j_l}(g)=q_{j_l}(g-1)\times$$

$$\times\frac{1-q_{j_s}(g-1)\dfrac{c_s(g-1)-1}{c_s(g-1)}\dfrac{1+\mathrm{sign}\,[c_s(g-1)-1]}{2}}{1-q_{j_s}(g-1)}=$$

$$=\frac{c_l(g)}{G}\quad\forall\, l\in\{\overline{1,L}\}\setminus\{s\}.\qquad(29)$$

Якщо при виборі деякої чистої стратегії x_{i_t} має місце нерівність

$$\frac{\sum_{m=1}^{g-1}V(m)+\tilde V(x_{i_t},\,g)}{g}=$$

$$=\frac{\sum_{m=1}^{g-1}V(m)+\sum_{l=1}^{L}w_{i_t j_l}q_{j_l}(g)}{g}<V_{\text{opt}}-\delta_1(g)\,,\quad(30)$$

де $t\in\{k\}_{k=1}^{K}$, то перший гравець розігрує випадкові величини $\{\Theta_k\}_{k=1}^{K-1}$ із значеннями $\{\theta_k\}_{k=1}^{K-1}$ до того моменту, доки для деякої чистої стратегії x_{i_r} не буде виконана нерівність

$$\frac{\sum_{m=1}^{g-1}V(m)+\tilde V(x_{i_r},\,g)}{g}=$$

$$=\frac{\sum_{m=1}^{g-1}V(m)+\sum_{l=1}^{L}w_{i_r j_l}q_{j_l}(g)}{g}\ge V_{\text{opt}}-\delta_1(g)\,,\quad(31)$$

де $r\in\{k\}_{k=1}^{K}$ і $0<\delta_1(g)<\delta_1(g-1)\quad\forall\, g=\overline{2,G}$.

Аналогічно має діяти і другий гравець. Йому в першій партії гри при виборі чистої стратегії y_{j_s}, $s\in\{l\}_{l=1}^{L}$, необхідно керуватися формальною вимогою

$$\tilde V(y_{j_s},1)=\sum_{k=1}^{K}w_{i_k j_s}\hat p_{i_k}\le V_{\text{opt}}+\delta_2(1)\,,\qquad(32)$$

де число $\delta_2(1)>0$ є своєрідним допуском втрати другого гравця в першій партії гри. Отже, якщо при виборі деякої чистої стратегії y_{j_h} має місце нерівність

$$\tilde V(y_{j_h},1)=\sum_{k=1}^{K}w_{i_k j_h}\hat p_{i_k}>V_{\text{opt}}+\delta_2(1),\qquad(33)$$

де $h\in\{l\}_{l=1}^{L}$, то другий гравець розігрує випадкові величини $\{\Xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ із значеннями $\{\xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ до того моменту, доки для деякої чистої стратегії y_{j_s} не буде виконано нерівність (32). Поки що не визначатимемо саме число $\delta_2(1)$, але з очевидної вимоги

$$V_{\text{opt}}+\delta_2(1)\le V_{\text{up}}=\min_{j=\overline{1,N}}\max_{i=\overline{1,M}}w_{ij}\qquad(34)$$

другий гравець буде керуватися верхнім значенням можливої втрати

$$\delta_2(1) \le V_{\text{up}} - V_{\text{opt}} = \min_{j=\overline{1, N}} \max_{i=\overline{1, M}} w_{ij} - V_{\text{opt}} \qquad (35)$$

у першій партії гри.

Отримавши програш $V(g-1)$ у $(g-1)$-й партії гри, другий гравець перед g-ю партією, де $g=\overline{2,G}$, може по елементах із значенням $V(g-1)$ матриці $\mathbf{W}$ визначити, якою саме із спектра (5) чистою стратегією користувався перший гравець. Нехай це була стратегія x_{i_r}, де $r \in \{k\}_{k=1}^{K}$. Зрозуміло, що у g-й партії гри імовірність вибору цієї стратегії буде меншою, і другий гравець повинен це враховувати за допомогою початкового зображення кожної імовірності у векторі (6) у вигляді дробу із знаменником, що дорівнює кількості G майбутніх партій гри:

$$\widehat{\mathbf{X}}_0 = [\widehat{p}_{i_1} \quad \widehat{p}_{i_2} \quad \ldots \quad \widehat{p}_{i_{K-1}} \quad \widehat{p}_{i_K}] =$$

$$= [p_{i_1}(1) \quad p_{i_2}(1) \quad \ldots \quad p_{i_{K-1}}(1) \quad p_{i_K}(1)] =$$

$$= \left[\frac{d_1(1)}{G} \quad \frac{d_2(1)}{G} \quad \ldots \quad \frac{d_{K-1}(1)}{G} \quad \frac{d_K(1)}{G}\right], \qquad (36)$$

де $d_k(1) = G\widehat{p}_{i_k} \quad \forall\, k=\overline{1,K}$. Тоді другий гравець після вибору першим гравцем у попередній, $(g-1)$-й, партії гри чистої стратегії x_{i_r}, $r \in \{k\}_{k=1}^{K}$, обчислює імовірність

$$p_{i_r}(g) = \frac{d_r(g-1)-1}{G}\,\frac{1+\operatorname{sign}[d_r(g-1)-1]}{2} = \frac{d_r(g)}{G} =$$

$$= p_{i_r}(g-1)\frac{d_r(g-1)-1}{d_r(g-1)}\,\frac{1+\operatorname{sign}[d_r(g-1)-1]}{2}. \qquad (37)$$

Враховуючи (37), з рівняння

$$p_{i_r}(g-1) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{K} p_{i_k}(g-1) = 1 \qquad (38)$$

для $(g-1)$-ї партії гри та рівняння

$$p_{i_r}(g) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{K} p_{i_k}(g) = 1 \qquad (39)$$

для поточної, g-ї, партії другий гравець обчислює інші $K-1$ імовірності

$$p_{i_k}(g) = p_{i_k}(g-1) \times$$

$$\times \frac{1 - p_{i_r}(g-1)\dfrac{d_r(g-1)-1}{d_r(g-1)}\,\dfrac{1+\operatorname{sign}[d_r(g-1)-1]}{2}}{1-p_{i_r}(g-1)} =$$

$$= \frac{d_k(g)}{G} \quad \forall\, k \in \{\overline{1,\ K}\}\backslash\{r\}. \qquad (40)$$

Якщо при виборі деякої чистої стратегії y_{j_h} має місце нерівність

$$\frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m) + \tilde{V}(y_{j_h},\ g)}{g} =$$

$$= \frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m) + \sum_{k=1}^{K} w_{i_k j_h} p_{i_k}(g)}{g} > V_{\text{opt}} + \delta_2(g), \qquad (41)$$

де $h \in \{l\}_{l=1}^{L}$, то другий гравець розігрує випадкові величини $\{\Xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ із значеннями $\{\xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ до того моменту, доки для деякої чистої стратегії y_{j_s} не буде виконана нерівність

$$\frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m) + \tilde{V}(y_{j_s},\ g)}{g} =$$

$$= \frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m) + \sum_{k=1}^{K} w_{i_k j_s} p_{i_k}(g)}{g} \le V_{\text{opt}} + \delta_2(g), \qquad (42)$$

де $s \in \{l\}_{l=1}^{L}$ і $0 < \delta_2(g) < \delta_2(g-1) \quad \forall\, g=\overline{2,G}$.

Взагалі кажучи, вимога того, щоб функції допусків втрат $\delta_1(g)$ і $\delta_2(g)$ були спадними для всіх $g=\overline{1,G}$, може бути порушена. Причиною цього є те, що, наприклад, у першого гравця перед g_0-ю партією гри нерівність (30), де $g=g_0$, $g_0 \in \{\overline{2,G}\}$, може виконуватись для всіх чистих стратегій $\{x_{i_t}\}_{t=1}^{K}$ із спектра (5). І оскільки нерівність (31) неможливо виконати, то першому гравцю необхідно скоригувати в точці g_0 функцію $\delta_1(g)$ так, щоб нерівність (31) виконувалась хоча б для однієї чистої стратегії x_{i_r} із спектра (5). Звісно, до g_0-ї партії гри монотонність функції $\delta_1(g)$ не порушується, і для зіграних $g_0 - 1$ партій залишиться $\delta_1(g+1) < \delta_1(g) \quad \forall g = \overline{1, g_0 - 2}$. Зазначимо, що подібне коригування можна назвати м'яким, оскільки можна поставити вимогу до $\delta_1(g_0)$, таку, щоб нерівність (31) виконувалась для всіх чистих стратегій $\{x_{i_r}\}_{r=1}^{K}$ із спектра (5). І тоді це вже буде жорстке коригування функції $\delta_1(g)$ у точці g_0. Функція допуску втрат $\delta_2(g)$ другого гравця аналогічно може бути скоригована у процесі повторення гри. Прикладом необхідності введення таких коригувань є матрична гра з матрицею

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 4 & -1000 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \tag{43}$$

в якій

$$\widehat{\mathbf{X}} = \widehat{\mathbf{X}}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{503} & \frac{502}{503} \end{bmatrix}, \tag{44}$$

$$\breve{\mathbf{Y}} = \breve{\mathbf{Y}}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1003}{1006} & \frac{3}{1006} \end{bmatrix}, \tag{45}$$

а значенням гри є

$$V_{\text{opt}} = \widehat{\mathbf{X}}\mathbf{W}(\breve{\mathbf{Y}})^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{503} & \frac{502}{503} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 4 & -1000 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1003}{1006} \\ \frac{3}{1006} \end{bmatrix} = \frac{506}{503}. \tag{46}$$

Перед початком гри

$$\delta_1(1) \le V_{\text{opt}} - V_{\text{low}} =$$

$$= V_{\text{opt}} - \max_{i=\overline{1,\,2}} \min_{j=\overline{1,\,2}} w_{ij} = \frac{506}{503} - 1 = \frac{3}{503}, \tag{47}$$

$$\delta_2(1) \le V_{\text{up}} - V_{\text{opt}} =$$

$$= \min_{j=\overline{1,\,N}} \max_{i=\overline{1,\,M}} w_{ij} - V_{\text{opt}} = 3 - \frac{506}{503} = \frac{1003}{503}. \tag{48}$$

Але елемент $w_{12} = -1000$ матриці (43) все ж може бути вибраний як виграш першого гравця в деякій g_0-й партії гри, хоча і з досить незначною імовірністю. Цілком очевидно, що тоді нерівність (31) не буде виконана для кожної з двох стратегій x_1 і x_2, тому перший гравець буде змушений коригувати свою функцію $\delta_1(g)$ у точці g_0.

Зауважимо, що вид функції допусків втрат $\delta_n(g)$ n-й гравець повинен визначати самостійно, але очевидною вимогою є прямування цієї функції до нуля при зростанні кількості g. Одним із варіантів виду функції $\delta_n(g)$ між кожними двома сусідніми коригуваннями є такий:

$$\delta_n(g) = \frac{1}{g\beta_n g^{1/a_n}}, \tag{49}$$

де $\beta_n > 0$ визначається в точці $g = 1$ або в точках коригування, а степеневий показник $a_n > 0$ n-й гравець визначає індивідуально, де $n \in \{1, 2\}$. При цьому, використовуючи правило Лопіталя щодо змінної g, неважко показати, що функція (49) прямує до нуля при $g \to \infty$:

$$\lim_{g\to\infty} \delta_n(g) = \lim_{g\to\infty} \frac{1}{g\beta_n g^{1/a_n}} = \lim_{g\to\infty} \frac{g^{-1/a_n}}{g\beta_n} =$$

$$= -\frac{1}{a_n\beta_n} \lim_{g\to\infty} g^{-(1/a_n)-1} = -\frac{1}{a_n\beta_n} \lim_{g\to\infty} g^{-(1+a_n)/a_n} =$$

$$= -\frac{1}{a_n\beta_n} \lim_{g\to\infty} \frac{1}{g^{(1+a_n)/a_n}} = 0. \tag{50}$$

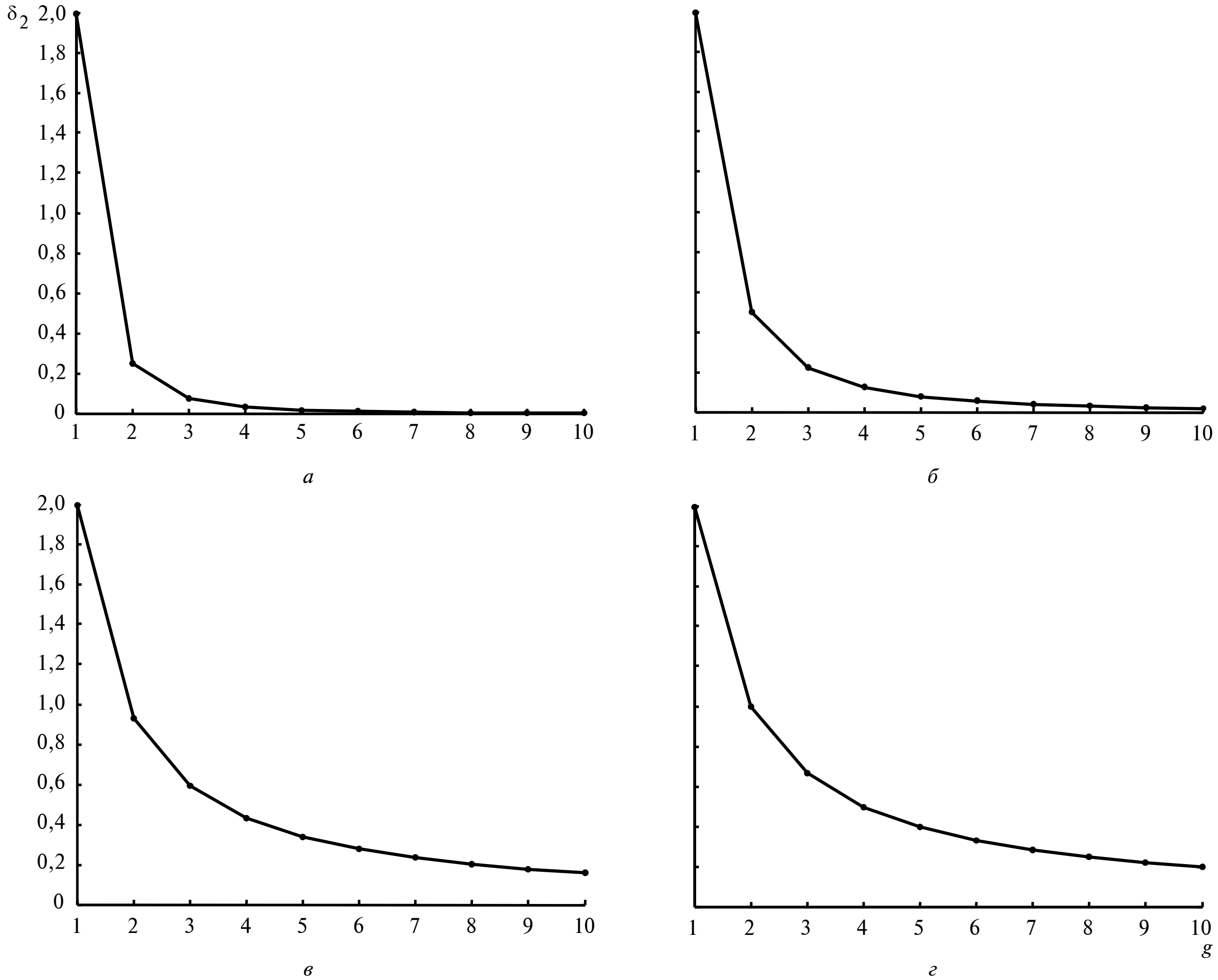
Питання про оптимальний вибір значення a_n поки що залишимо відкритим. А ось нижня границя значення β_1 визначається за допомогою (18) при підстановці в (49) початкового значення $g = 1$:

$$\beta_1 \ge \frac{1}{V_{\text{opt}} - V_{\text{low}}} = \frac{1}{V_{\text{opt}} - \max\limits_{i=\overline{1,\,M}} \min\limits_{j=\overline{1,\,N}} w_{ij}}. \tag{51}$$

Аналогічно нижня границя значення β_2 визначається за допомогою (35) при підстановці в (49) $g = 1$:

$$\beta_2 \ge \frac{1}{V_{\text{up}} - V_{\text{opt}}} = \frac{1}{\min\limits_{j=\overline{1,\,N}} \max\limits_{i=\overline{1,\,M}} w_{ij} - V_{\text{opt}}}. \tag{52}$$

Степеневий показник a_n фактично визначає швидкість спадання функції (49), але з рисунка видно, що його на початку гри можна покладати рівним одиниці: $a_n = 1$, $n \in \{1, 2\}$. При коригуваннях функції (49) це значення можна і не змінювати.



Графік ламаної $\delta_2(g) = \frac{1}{g\beta_2 g^{1/a_2}}$ для матричної гри з матрицею (43) при $a_2 = 0{,}5$ (*а*), $a_2 = 1$ (*б*), $a_2 = 10$ (*в*), $a_2 = 1000$ (*г*), де $g = \overline{1{,}10}$, $\beta_2 = \frac{1}{V_{\text{up}} - V_{\text{opt}}} = \frac{503}{1003}$

Висновки

При наперед відомій кількості партій гри в матричній $M \times N$-грі з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях кожен із гравців має використовувати відомий принцип оптимальної поведінки, розігруючи при цьому рівномірно розподілені на напівсегменті $[0; 1)$ випадкові величини і визначаючи за певними співвідношеннями ту чисту стратегію, яку в даній партії гри необхідно вибирати. Перший гравець визначає свою функцію допусків втрат $\delta_1(g)$ і перед кожною g-ю партією гри за результатами вибору другого гравця у $(g-1)$-й партії перераховує за формулами (28) і (29) імовірності вибору другим гравцем його чистих стратегій у поточній, g-й, партії гри. Перший гравець стежить за тим, щоб вибрана чиста стратегія x_{i_r} задовольняла нерівність (31). Аналогічно цьому, другий гравець визначає свою функцію допусків втрат $\delta_2(g)$ і перед кожною g-ю партією гри за результатами вибору першого гравця у $(g-1)$-й партії перераховує за формулами (37) і (40) імовірності вибору першим гравцем його чистих стратегій у поточній, g-й, партії гри. Другий гравець стежить за тим, щоб вибрана чиста стратегія y_{j_s} задовольняла нерівність (42). Проте основною проблемою розробленого методу реалізації оптимальних змішаних стратегій у довільній матричній грі з відомою кількістю партій гри є випадки своєрідного маскування вибору гравцями своїх чистих стратегій. Це може мати місце тоді, коли, скажімо, у $(g-1)$-й партії гри перший гравець вибрав стратегію x_{i_r} та отримав виграш $w_{i_r j_s}$. Але якщо в i_r-му рядку матриці гри $\mathbf{W}$ є принаймні два елементи із значеннями $w_{i_r j_s}$, що стоять у стовпчиках, які відповідають спектру (7), причому імовірності вибору відповідних чистих стратегій другого гравця на даний момент не є нульовими, то перший гравець може і помилитися, віддавши перевагу одній із цих двох стратегій. Це питання потребує глибшого дослідження, як і перехід до нескінченних антагоністичних ігор без сідлових точок у чистих стратегіях та застосування там розробленого методу реалізації оптимальних змішаних стратегій для відомого значення G.

В.В. Романюк

МЕТОД РЕАЛИЗАЦИИ ОПТИМАЛЬНЫХ СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЙ В МАТРИЧНОЙ ИГРЕ С ПУСТЫМ МНОЖЕСТВОМ СЕДЛОВЫХ ТОЧЕК В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ С ИЗВЕСТНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ПАРТИЙ ИГРЫ

Представлены основы метода реализации оптимальных смешанных стратегий в произвольной матричной игре с пустым множеством седловых точек в чистых стратегиях с наперед известным количеством партий игры. Разработанный метод базируется на определении игроком тех чистых стратегий, которые он избирает, с помощью разыгрывания равномерно распределенных на единичном полусегменте случайных величин, а также вычисления текущих вероятностей выбора чистых стратегий другим игроком.

V.V. Romanyuk

THE METHOD OF APPLYING THE OPTIMAL MIXED STRATEGIES IN THE MATRIX GAME WITH THE EMPTY SET OF SADDLE POINTS IN PURE STRATEGIES WITH THE KNOWN NUMBER OF THE GAME PLAYS

This paper highlights the foundations of the method of applying the optimal mixed strategies in the random matrix game with an empty set of saddle points in the pure strategies with the previously known quantity of the game plays. This method is based on the player's choice of the pure strategies. The player chooses the pure strategies by raffling the uniformly distributed random variates on the individual semisegment, as well as by calculating the current probabilities of selecting the pure strategies by another player.

1. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1985. – 272 с.
2. *Romanuke V.V.* The principle of optimality problem in the elementary matrix game with the finite number of plays // Вісн. Хмельн. нац. ун-ту. Технічні науки. – 2007. – № 1. – С. 226–230.
3. *Романюк В.В.* Про порядок перебору чистих стратегій в одній матричній грі без сідлової точки для реалізації оптимальних змішаних стратегій // Матер. II Междунар. науч.-практ. конф. "Ключевые аспекты научной деятельности-2007". Том 7. Естественные науки. – Днепропетровск: Наука и образование, 2007. – С. 12–14.
4. *Романюк В.В.* Моделювання реалізації оптимальних змішаних стратегій в антагоністичній грі з двома чистими стратегіями в кожного з гравців // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 3. – С. 74–77.
5. *Романюк В.В.* Формулювання одного з принципів оптимальності в елементарній антагоністичній грі без сідлової точки при неповній реалізації оптимальних змішаних стратегій // Вісн. Хмельн. нац. ун-ту. Технічні науки. – 2007. – **2**, № 2. – С. 218–222.
6. *Романюк В.В.* Тактика перебору чистих стратегій як теоретичне підгрунтя для дослідження ефективності різних способів реалізації оптимальних змішаних стратегій // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 61–68.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
10 жовтня 2008 року